

2020年天津河西区高三一模数学试卷

一、选择题

(本大题共9小题，每小题5分，共45分)

1. 已知集合 $U = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$, $A = \{1, 5\}$, $B = \{-1, 5, 7\}$, 则 $\complement_U(A \cup B) = ()$.
- A. $\{3, 9\}$ B. $\{1, 5, 7\}$ C. $\{-1, 1, 3, 9\}$ D. $\{-1, 1, 3, 7, 9\}$

2. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $x^2 - 3x < 0$ ” 是 “ $|x - 1| < 2$ ” 的 $()$.
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知圆 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$ 截直线 $x + y + 2 = 0$ 所得弦的长度为4, 则 $a = ()$.
- A. -2 B. -4 C. -6 D. -8

4. 某中学共有高中学生2000名, 各年级男、女生人数如下表. 已知在全体高中学生中随机抽取1名学生, 抽到高二年级女生的概率是0.19. 现用分层抽样的方法在全体高中学生抽取64名学生, 则应在高三年级抽取的女学生人数为:

	一年级	二年级	三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	250

- A. 24 B. 16 C. 12 D. 8

5. 设 l, m 是不同的直线, α, β, γ 是不同的平面, 则下列结论正确的是 $()$.
- A. 若 $l // \alpha, m // \alpha$, 则 $l // m$ 或 l 与 m 相交. B. 若 $l // \alpha, \alpha \perp \beta$, 则 $l \perp \beta$ 或 $l \subset \beta$
- C. 若 $l \perp \gamma, \alpha \perp \gamma$, 则 $l // \alpha$ 或 $l \subset \alpha$ D. 若 $l \perp m, m \perp \alpha$, 则 $l \perp \alpha$ 或 $l // \alpha$

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ -x^2-1, & x < 0 \end{cases}$, $a = f(0.7^{-0.5})$, $b = f(\log_{0.5} 0.7)$, $c = f(\log_{0.7} 5)$, 则 a, b, c 的大小关系是 $()$.
- A. $b > c > a$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $a > b > c$

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{9} = 1$, O 为坐标原点, F 为 C 的右焦点, 过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 P, Q , 若 $\triangle POQ$ 为直角三角形, 则 $|PQ| = ()$.
- A. 2 B. 3 C. 6 D. 9

8. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) + 2 \cos^2\left(\frac{\omega x}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)$ (其中 $\omega > 0, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$), 当 $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ 时, $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$, $f(x) = f\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, 将 $f(x)$ 的图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数为 $g(x)$, 则 $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = ()$.
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ B. $\sqrt{3} + 1$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

9. 已知实数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \frac{a}{2}, & x < 0 \\ e^{x-1} + \frac{a}{2}x^2 - (a+1)x + \frac{a}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f[-f(x)] = e^{-a} + \frac{a}{2}$ 有三个不等的实根, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $\left(1, 2 + \frac{2}{e}\right)$ B. $\left(2, 2 + \frac{2}{e}\right)$ C. $\left(1, 1 + \frac{1}{e}\right)$ D. $\left(2, 2 + \frac{1}{e}\right)$

二、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

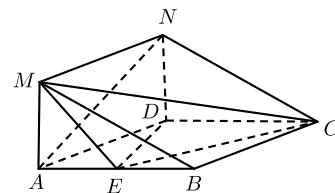
10. 设 i 是虚数单位, $a + i = (1 + 2i)bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 则 $b - a =$ _____.
11. $\left(2x^3 - \frac{1}{2x}\right)^8$ 的展开式中的常数项为 _____.
12. 已知棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的侧棱 AA_1 垂直于底面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $AA_1 = 2AB$, 且棱柱的表面积为 20, 则以四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心为顶点, 以四边形 $ABCD$ 的内切圆面为底面的圆锥的体积为 _____.
13. 设函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 在动点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率的最小值为 _____.
14. 已知一个袋子中装有 1 个黑球、2 个白球、3 个红球, 假设每一个球被摸到的可能性是相等的, 若从袋子中摸出 3 个球, 则摸出白球比黑球多一个的概率为 _____; 记摸到的白球的个数为 X , 则随机变量 X 的数学期望是 _____.
15. 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 6$, $AD = 2$, $CD = 3$, E 为 AD 的中点, $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC} = -19$, 则 $\cos \angle BAD =$ _____, 设点 P 为线段 CD 上的动点, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 的最小值为 _____.

三、解答题

(本大题共5小题, 共75分)

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 且 $a \sin A + c \sin C - b \sin B = \sqrt{2}a \sin C$.
- (1) 求角 B 的大小.
- (2) 若 $3a = 2b$.
- 1 求 $\sin A$ 的值.
 - 2 求 $\sin(2A + B)$ 的值.

17. 如图所示的几何体中，四边形 $ABCD$ 是菱形， $ADNM$ 是矩形， $ND \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $AD = 2$ ， $AM = 1$ ， E 是 AB 的中点.



(1) 求证： $NA \parallel$ 平面 MEC .

(2) 求直线 MB 与平面 MEC 所成角的正弦值.

(3) 设 P 为线段 AM 上的动点，二面角 $P - EC - D$ 的平面角的大小为 30° ，求线段 AP 的长.

18. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F 的坐标为 $(1, 0)$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 设点 P 、 Q 为椭圆上位于第一象限的两个动点, 满足 $PF \perp QF$, C 为 PQ 的中点, 线段 PQ 的垂直平分线分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 两点.

1 求证: A 为 BC 的中点.

2 若 $\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle BCF}} = \frac{3}{5}$ (S 为三角形的面积), 求直线 PQ 的方程.

19. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于0, 其前 n 项和为 $S_n(n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是等差数列. 已知 $a_1 = 1$, $a_3 = a_2 + 2$, $a_4 = b_3 + b_5$, $a_5 = b_4 + 2b_6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1) \cdot (a_{n+1} + 1)}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n 的值.

(3) 设 $d_n = \begin{cases} b_n, & n \neq 2^k \\ b_n(\log_2 b_n + 1), & n = 2^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$, 求 $\sum_{i=1}^{2^n} d_i (n \in \mathbf{N}^*)$.

20. 已知函数 $f(x) = \ln x - 2ax$ (其中 $a \in \mathbf{R}$) .

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线方程.

(2) 若 $f(x) \leq 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

(3) 设 $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2$, 且函数 $g(x)$ 有极大值点 x_0 , 求证: $x_0 f(x_0) + 1 + ax_0^2 > 0$.